# Tentamen Discrete Structuren

donderdag 15 maart 2001, 9 - 12 uur

Elke opgave levert maximaal 9 punten op. Het cijfer is (p/10) + 1, afgerond op gehele en halve waarden, waarbij p het totaal aantal behaalde punten is. Wie een 5 of hoger heeft gehaald voor de toets van 29-1-2001, hoeft de eerste 5 opgaven niet te maken: het cijfer voor de toets telt voor de helft mee in het tentamenresultaat. Heb je bij de toets 5 of hoger gehaald en maak je ook de opgaven 1 t/m 5, dan telt het beste resultaat.

**NB. Beargumenteer je antwoorden.**

1. Bewijs mbv. een lineair geannoteerd bewijs:

$$((p \to q) \to q) \;\Leftrightarrow\; (p \vee q)$$

2. Bewijs met volledige inductie over $N$:

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$$

3. a. Definieer: propositie p is een invariant van de loop `while g do S`.
   b. $m, n$ zijn gehele getallen. Laat zien dat $n \geq 0$ een invariant is van

```
while  m > 0  do
  n := n * (m - 1) * (n + m)
```

4. a. Zij $s(n)$ ($n \in N$) een rij getallen. Wat is de definitie van $s(n) = O(n)$? En van $s(n) = \Theta(n)$?
   b. Geldt $2^{2n} = O(2^n)$? En $2^{n+1} = \Theta(2^n)$?

5. Geef een expliciete formule voor $s_n$, gegeven door

$$s_0 = -1$$
$$s_1 = 4$$
$$s_n = 4s_{n-1} - 4s_{n-2} \quad \text{voor} \quad n \geq 2$$

6. Deze opgave gaat over eindige ongerichte grafen $G$.
   a. Definieer: $G$ is samenhangend (*connected*); $G$ is een boom.
   b. Bewijs dat een samenhangende graaf met $n$ knopen (*vertices*) ten minste $n-1$ kanten (*edges*) bevat. [Aanwijzing: denk aan de opspannende boom (*spanning tree*).]

7. a. Geef een logisch netwerk dat output 1 heeft dan en slechts dan als precies één van de inputs $x, y, z$ de waarde 1 heeft.
   b. Geef een logisch netwerk dat output 1 heeft dan en slechts dan als ten minste twee van de vier inputs $x, y, z, w$ de waarde 1 hebben.

8. a. Geef een definitie van het begrip tralie (*lattice*).
   b. Teken het Hasse-diagram van een partiële ordening die de elementen a en b bevat, en waarin a en b een bovengrens hebben maar geen *kleinste* bovengrens.

9. Bewijs mbv. een geannoteerd lineair bewijs

$$(\exists x p(x) \rightarrow \forall x q(x)) \;\Rightarrow\; \forall x (p(x) \rightarrow q(x))$$

10. a. Wanneer zijn twee verzamelingen (eindig of oneindig) even groot?
    b. Geef een voorbeeld van twee even grote verzamelingen $X$ en $Y$ met $X \neq Y$ en $X \subseteq Y$.